Bewertung von Finanzderivaten

Theorie, Modellierung, Implementierung

Christian Fries
20.10.2004
www.christian-fries.de/finmath
Version 1.0
Based on earlier version (31.10.2003) of the talk given in Mainz

Modellierung

Modeling (1/5)

Finanzprodukt:

Vertraglich festgelegte Zahlungsströme in Abhängigkeit von Ereignissen.

Modellierung:

Modellierung eines Zahlungsstromes zu festem Zeitpunkt $T \geq 0$ als *Zufallsvariable*

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Modellierung der Wertentwicklung eines Finanzproduktes als *stochastischer Prozess*

$$S : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$S(\omega)$ mit $\omega \epsilon \Omega$ ist als Abbildung von $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ der *Pfad* von S im Zustand ω.

Alle Zufallsvariablen seien über dem selben *Messraum* $(\Omega, \mathcal{F})$ definiert.

$$\omega \epsilon \Omega \quad \leftrightarrow \quad \text{pfad / historie}$$

Information wird modelliert durch die *Filtration*: Familie von σ-Algebren $\mathcal{F}_t$ ($\subset \mathcal{F}_s$, $t < s$), deren Elemente die Ereignisse sind, welche in t bekannten sein können $\Rightarrow X$ muß $\mathcal{F}_T$ meßbar sein.

Modeling (2/5): Filtration, stochastic Processes

Beispiel: Münzwurf zu Zeitpunkten T_1, T_2, T_3.

Modellierung (z.B. einer Wette):

$\Omega = \{(h,h,h),(h,h,t),(h,t,h),\ldots,(t,t,t)\}$ - Ereignisraum (**h**ead or **t**ail).

$X : \Omega \mapsto \mathrm{I\!R}$ - Wette mit einzelner Auszahlung

$S : \{T_1, T_2, T_3\} \times \Omega \mapsto \mathrm{I\!R}$

$S(T_k)$ werde zum Zeitpunkt T_k ausgezahlt.

} - Wette mit Zahlungsstrom / Wertentwicklung

Bedingung (*): $S(T_k)$ darf nur von Ereignissen die vor oder in T_k bekannt sind abhängen.

$$\Leftrightarrow \qquad S(T_k,(e_1,\ldots,e_n)) = \text{ const. } \forall e_i \in \{h,t\} \text{ mit } i > k$$

Definiere Familie von σ-Algebren (*Filtration*):

$$\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\}$$
$$\mathcal{F}_1 = \sigma(\{\{(h,*,*)\},\{(t,*,*)\}\})$$
$$\mathcal{F}_2 = \sigma(\{\{(h,h,*)\},\{(h,t,*)\},\{(t,h,*)\},\{(t,t,*)\}\})$$
$$\mathcal{F}_3 = \sigma(\{\{(h,h,h)\},\{(h,h,t)\},\{(h,t,h)\},\ldots,\{(t,t,*)\}\})$$

Bedingung (*): $S(T_k)$ ist $\mathcal{F}_k$-messbar.

Modeling (2/5): Filtration, stochastic Processes

Beispiel: Münzwurf zu Zeitpunkten T_1, T_2, T_3.

Modellierung (z.B. einer Wette):

$\Omega = \{(h,h,h),(h,h,t),(h,t,h),\ldots,(t,t,t)\}$ - Ereignisraum (**h**ead or **t**ail).

$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ - Wette mit einzelner Auszahlung

$S : \{T_1, T_2, T_3\} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$

$S(T_k)$ werde zum Zeitpunkt T_k ausgezahlt.

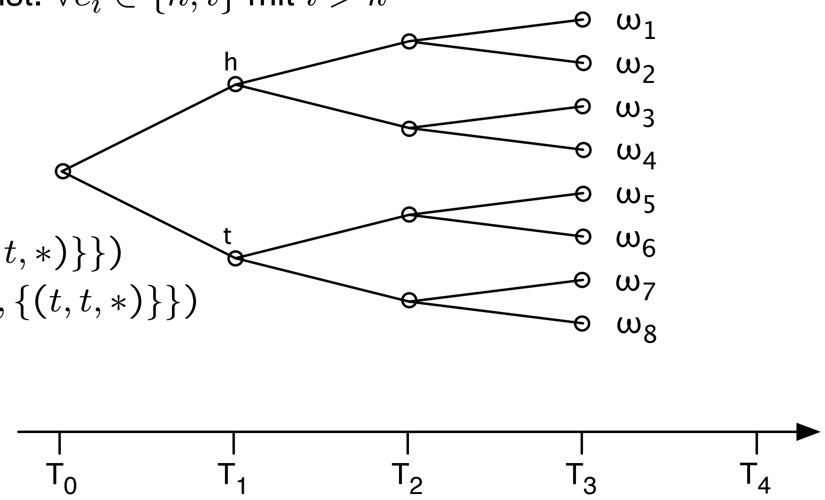
} - Wette mit Zahlungsstrom / Wertentwicklung

Bedingung (*): $S(T_k)$ darf nur von Ereignissen die vor oder in T_k bekannt sind abhängen.

$$\Leftrightarrow \qquad S(T_k,(e_1,\ldots,e_n)) = \text{ const. } \forall e_i \in \{h,t\} \text{ mit } i > k$$

Definiere Familie von σ-Algebren (*Filtration*):

$$\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\}$$
$$\mathcal{F}_1 = \sigma(\{\{(h,*,*)\},\{(t,*,*)\}\})$$
$$\mathcal{F}_2 = \sigma(\{\{(h,h,*)\},\{(h,t,*)\},\{(t,h,*)\},\{(t,t,*)\}\})$$
$$\mathcal{F}_3 = \sigma(\{\{(h,h,h)\},\{(h,h,t)\},\{(h,t,h)\},\ldots,\{(t,t,*)\}\})$$



Bedingung (*): $S(T_k)$ ist $\mathcal{F}_k$-messbar.

Modeling (2/5): Filtration, stochastic Processes

Beispiel: Münzwurf zu Zeitpunkten T_1, T_2, T_3.

Modellierung (z.B. einer Wette):

$\Omega = \{(h,h,h),(h,h,t),(h,t,h),\dots,(t,t,t)\}$ - Ereignisraum (**h**ead or **t**ail).

$X : \Omega \mapsto \mathrm{IR}$ - Wette mit einzelner Auszahlung

$S : \{T_1, T_2, T_3\} \times \Omega \mapsto \mathrm{IR}$

$S(T_k)$ werde zum Zeitpunkt T_k ausgezahlt.

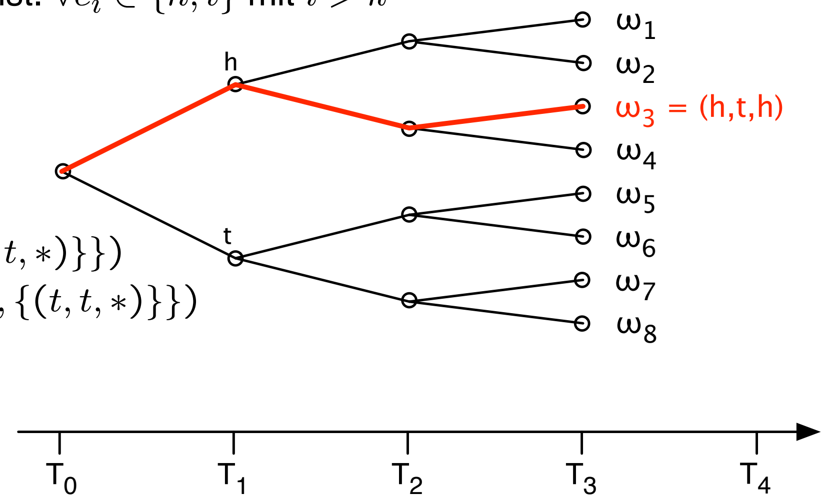
} - Wette mit Zahlungsstrom / Wertentwicklung

Bedingung (*): $S(T_k)$ darf nur von Ereignissen die vor oder in T_k bekannt sind abhängen.

$$\Leftrightarrow \qquad S(T_k,(e_1,\dots,e_n)) = \text{const. } \forall e_i \in \{h,t\} \text{ mit } i > k$$

Definiere Familie von σ-Algebren (*Filtration*):

$$\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\}$$
$$\mathcal{F}_1 = \sigma(\{\{(h,*,*)\},\{(t,*,*)\}\})$$
$$\mathcal{F}_2 = \sigma(\{\{(h,h,*)\},\{(h,t,*)\},\{(t,h,*)\},\{(t,t,*)\}\})$$
$$\mathcal{F}_3 = \sigma(\{\{(h,h,h)\},\{(h,h,t)\},\{(h,t,h)\},\dots,\{(t,t,*)\}\})$$



Bedingung (*): $S(T_k)$ ist $\mathcal{F}_k$-messbar.

Modeling (2/5): Filtration, stochastic Processes

Beispiel: Münzwurf zu Zeitpunkten T_1, T_2, T_3.

Modellierung (z.B. einer Wette):

$\Omega = \{(h,h,h),(h,h,t),(h,t,h),\ldots,(t,t,t)\}$ - Ereignisraum (**h**ead or **t**ail).

$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ - Wette mit einzelner Auszahlung

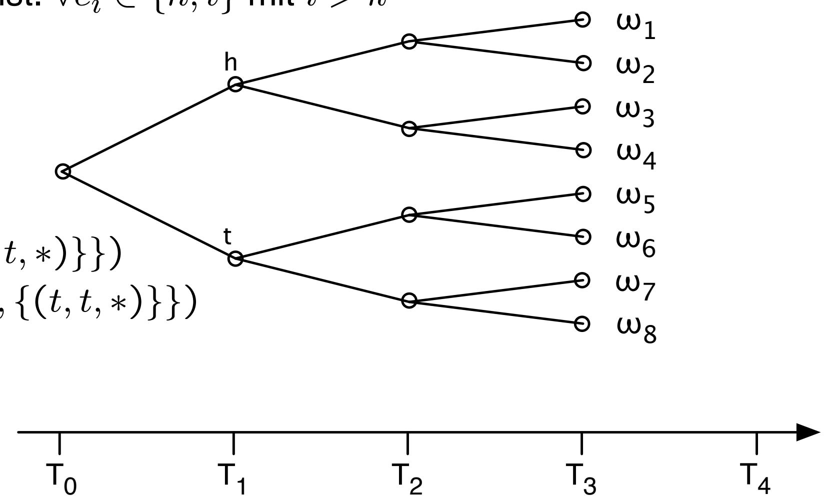
$S : \{T_1, T_2, T_3\} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$

$S(T_k)$ werde zum Zeitpunkt T_k ausgezahlt.

} - Wette mit Zahlungsstrom / Wertentwicklung

Bedingung (*): $S(T_k)$ darf nur von Ereignissen die vor oder in T_k bekannt sind abhängen.

$$\Leftrightarrow \qquad S(T_k,(e_1,\ldots,e_n)) = \text{ const. } \forall e_i \in \{h,t\} \text{ mit } i > k$$



Definiere Familie von σ-Algebren (*Filtration*):

$$\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\}$$
$$\mathcal{F}_1 = \sigma(\{\{(h,*,*)\},\{(t,*,*)\}\})$$
$$\mathcal{F}_2 = \sigma(\{\{(h,h,*)\},\{(h,t,*)\},\{(t,h,*)\},\{(t,t,*)\}\})$$
$$\mathcal{F}_3 = \sigma(\{\{(h,h,h)\},\{(h,h,t)\},\{(h,t,h)\},\ldots,\{(t,t,*)\}\})$$

Bedingung (*): $S(T_k)$ ist $\mathcal{F}_k$-messbar.

Beispiel: Münzwurf zu Zeitpunkten T_1, T_2, T_3.

Modellierung (z.B. einer Wette):

$\Omega = \{(h,h,h),(h,h,t),(h,t,h),\dots,(t,t,t)\}$ - Ereignisraum (**h**ead or **t**ail).

$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ - Wette mit einzelner Auszahlung

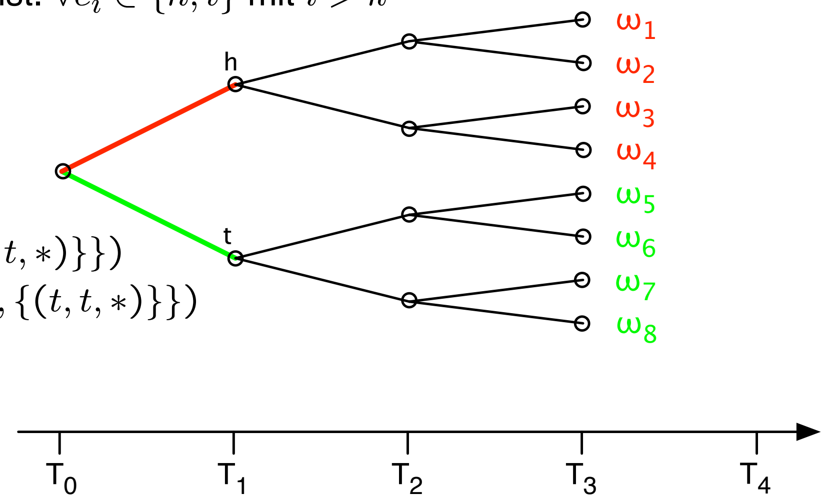
$\left.\begin{array}{l} S : \{T_1,T_2,T_3\} \times \Omega \mapsto \mathbb{R} \\ S(T_k) \text{ werde zum Zeitpunkt } T_k \text{ ausgezahlt.} \end{array}\right\}$ - Wette mit Zahlungsstrom / Wertentwicklung

Bedingung (*): $S(T_k)$ darf nur von Ereignissen die vor oder in T_k bekannt sind abhängen.

$$\Leftrightarrow \qquad S(T_k,(e_1,\dots,e_n)) = \text{ const. } \forall e_i \in \{h,t\} \text{ mit } i > k$$

Definiere Familie von σ-Algebren (*Filtration*):

$$\mathcal{F}_0 = \{0,\Omega\}$$
$$\mathcal{F}_1 = \sigma(\{\{(h,*,*)\},\{(t,*,*)\}\})$$
$$\mathcal{F}_2 = \sigma(\{\{(h,h,*)\},\{(h,t,*)\},\{(t,h,*)\},\{(t,t,*)\}\})$$
$$\mathcal{F}_3 = \sigma(\{\{(h,h,h)\},\{(h,h,t)\},\{(h,t,h)\},\dots,\{(t,t,*)\}\})$$



Bedingung (*): $S(T_k)$ ist $\mathcal{F}_k$-messbar.

Modeling (2/5): Filtration, stochastic Processes

Beispiel: Münzwurf zu Zeitpunkten T_1, T_2, T_3.

Modellierung (z.B. einer Wette):

$\Omega = \{(h,h,h),(h,h,t),(h,t,h),\ldots,(t,t,t)\}$ - Ereignisraum (**h**ead or **t**ail).

$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ - Wette mit einzelner Auszahlung

$S : \{T_1,T_2,T_3\} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$

$S(T_k)$ werde zum Zeitpunkt T_k ausgezahlt.

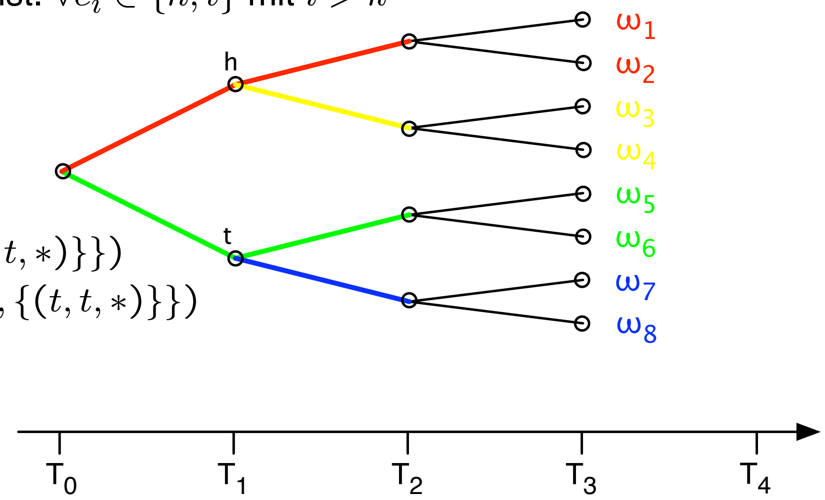
} - Wette mit Zahlungsstrom / Wert-entwicklung

Bedingung (*): $S(T_k)$ darf nur von Ereignissen die vor oder in T_k bekannt sind abhängen.

$$\Leftrightarrow \qquad S(T_k,(e_1,\ldots,e_n)) = \text{const. } \forall e_i \in \{h,t\} \text{ mit } i > k$$

Definiere Familie von σ-Algebren (*Filtration*):

$$\mathcal{F}_0 = \{0,\Omega\}$$
$$\mathcal{F}_1 = \sigma(\{\{(h,*,*)\},\{(t,*,*)\}\})$$
$$\mathcal{F}_2 = \sigma(\{\{(h,h,*)\},\{(h,t,*)\},\{(t,h,*)\},\{(t,t,*)\}\})$$
$$\mathcal{F}_3 = \sigma(\{\{(h,h,h)\},\{(h,h,t)\},\{(h,t,h)\},\ldots,\{(t,t,*)\}\})$$



Bedingung (*): $S(T_k)$ ist $\mathcal{F}_k$-messbar.

Modeling (2/5): Filtration, stochastic Processes

Beispiel: Münzwurf zu Zeitpunkten T_1, T_2, T_3.

Modellierung (z.B. einer Wette):

$\Omega = \{(h,h,h),(h,h,t),(h,t,h),\dots,(t,t,t)\}$ - Ereignisraum (**h**ead or **t**ail).

$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ - Wette mit einzelner Auszahlung

$S : \{T_1, T_2, T_3\} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$

$S(T_k)$ werde zum Zeitpunkt T_k ausgezahlt.

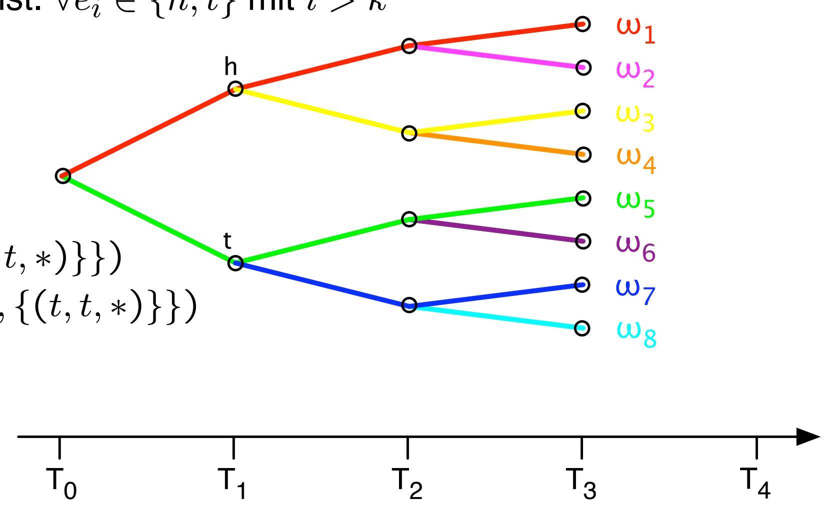
} - Wette mit Zahlungsstrom / Wertentwicklung

Bedingung (*): $S(T_k)$ darf nur von Ereignissen die vor oder in T_k bekannt sind abhängen.

$\Leftrightarrow \quad S(T_k, (e_1, \dots, e_n)) =$ const. $\forall e_i \in \{h, t\}$ mit $i > k$

Definiere Familie von σ-Algebren (*Filtration*):

$$\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\}$$
$$\mathcal{F}_1 = \sigma(\{\{(h,*,*)\},\{(t,*,*)\}\})$$
$$\mathcal{F}_2 = \sigma(\{\{(h,h,*)\},\{(h,t,*)\},\{(t,h,*)\},\{(t,t,*)\}\})$$
$$\mathcal{F}_3 = \sigma(\{\{(h,h,h)\},\{(h,h,t)\},\{(h,t,h)\},\dots,\{(t,t,*)\}\})$$



Bedingung (*): $S(T_k)$ ist $\mathcal{F}_k$-messbar.

Modeling (3/5): Brownian Motion

Prototyp eines stochastischen Prozesses - Baustein für Itô Prozesse:

Brownsche Bewegung: W

- $W(t)$ definiert über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- $W(0) = 0$.
- $W(t)$ Normalverteilt mit Mittelwert 0 und Standardabweichung $\sqrt{t}$.
- $W(t_2) - W(t_1)$ Normalverteilt mit Mittelwert 0 und Standardabweichung $\sqrt{t_2 - t_1}$.
- $W(\cdot, \omega)$ stetige (aber nirgends differenzierbare) Funktion $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (P-fast sicher).

Konstruktion einer zeit-diskreten Approximation:

$$\tilde{W}(t_k) := \sum_{i=0}^{k-1} \Delta W(t_i) \quad (0 = t_0 < t_1 < \ldots),$$

wobei

$$\tilde{W}(t_0) := 0 \quad , \quad \Delta W(t_i) = (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{t_{i+1} - t_i}) \text{ (i.i.d).}$$

Infinitesimale Notation:

$$W(t) =: \int_0^t \mathrm{d}W(\tau).$$

Modeling (3/5): Brownian Motion

Prototyp eines stochastischen Prozesses - Baustein für Itô Prozesse:

Brownsche Bewegung: W

- $W(t)$ definiert über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- $W(0) = 0$.
- $W(t)$ Normalverteilt mit Mittelwert 0 und Standardabweichung $\sqrt{t}$.
- $W(t_2) - W(t_1)$ Normalverteilt mit Mittelwert 0 und Standardabweichung $\sqrt{t_2 - t_1}$.
- $W(\cdot, \omega)$ stetige (aber nirgends differenzierbare) Funktion $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (P-fast sicher).

Konstruktion einer zeit-diskreten Approximation:

$$\tilde{W}(t_k) := \sum_{i=0}^{k-1} \Delta W(t_i) \quad (0 = t_0 < t_1 < \ldots),$$

wobei

$$\tilde{W}(t_0) := 0 \quad , \quad \Delta W(t_i) = (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{t_{i+1} - t_i}) \text{ (i.i.d)}.$$

Infinitesimale Notation:

$$W(t) =: \int_0^t \mathrm{d}W(\tau).$$

$\longrightarrow$ Theory of stochastic integration (integration with stochastic process as integrator).

Wir beschränken uns zunächst auf die Modellierung mittels *Ito Prozessen*:

Stochastic Differential Equation:

$$\mathrm{d}S = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W,$$

wobei μ, σ Konstanten, Funktionen in t, oder gar selbst ($\mathcal{F}_t$-adaptierte) stochastische Prozesse oder stochastische Prozesse der Form $\mu(t, S(t))$, $\sigma(t, S(t))$ sind.

Integral Form:

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \mu(\tau, S(\tau))\, \mathrm{d}\tau \; + \; \int_0^t \sigma(\tau, S(\tau)) \mathrm{d}W(\tau).$$

Euler Discretization:

$$\underbrace{\Delta \tilde{S}(t_i)}_{\tilde{S}(t_{i+1}) - \tilde{S}(t_i)} = \mu(t_i, \tilde{S}(t_i)) \cdot \underbrace{\Delta t_i}_{t_{i+1} - t_i} + \sigma(t_i, \tilde{S}(t_i)) \cdot \underbrace{\Delta W_i}_{\sim \mathcal{N}(0, \sqrt{\Delta t_i})} \qquad \text{mit } \tilde{S}(0) = S(0),$$

wobei $\{\tilde{S}(t_i) \mid 0 = t_0 < t_1 < \ldots\}$ die *Euler Diskretisierung* von $\{S(t) \mid t \geq 0\}$ ist.

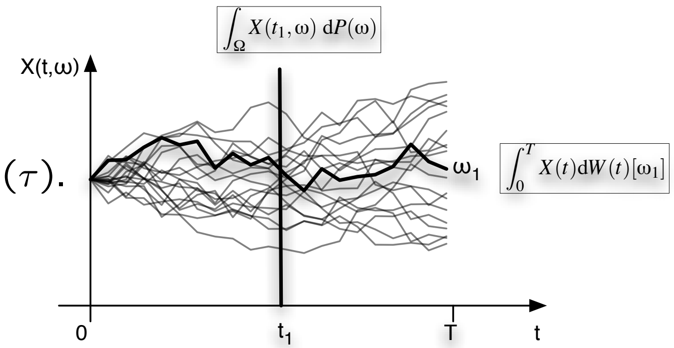
Modeling (4/5): Itô-Processes

Wir beschränken uns zunächst auf die Modellierung mittels *Ito Prozessen*:

Stochastic Differential Equation:

$$\mathrm{d}S = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W,$$

wobei μ, σ Konstanten, Funktionen in t, oder gar selbst ($\mathcal{F}_t$-adaptierte) stochastische Prozesse oder stochastische Prozesse der Form $\mu(t, S(t))$, $\sigma(t, S(t))$ sind.



Integral Form:

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \mu(\tau, S(\tau))\, \mathrm{d}\tau \; + \; \int_0^t \sigma(\tau, S(\tau))\mathrm{d}W(\tau).$$

Euler Discretization:

$$\underbrace{\Delta\tilde{S}(t_i)}_{\tilde{S}(t_{i+1}) - \tilde{S}(t_i)} = \mu(t_i, \tilde{S}(t_i)) \cdot \underbrace{\Delta t_i}_{t_{i+1} - t_i} + \sigma(t_i, \tilde{S}(t_i)) \cdot \underbrace{\Delta W_i}_{\sim \mathcal{N}(0, \sqrt{\Delta t_i})} \qquad \text{mit } \tilde{S}(0) = S(0),$$

wobei $\{\tilde{S}(t_i) \mid 0 = t_0 < t_1 < \ldots\}$ die *Euler Diskretisierung* von $\{S(t) \mid t \geq 0\}$ ist.

Modeling (5/5): Example

Modellierung (Black-Scholes Modell einer Aktie):

$$\mathrm{d}S(t) = \mu(t)S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t),$$

wobei S die Wertentwicklung einer Aktie modellieren (stoch. Prozess).

Zeit-diskrete Approximation (Euler Schema):

$$\Delta S(t) \approx \mu(t)S(t)\Delta t + \sigma S(t)\Delta W(t)$$
$$S(t+\Delta t) \approx S(t) + \mu(t)S(t)\Delta t + \sigma S(t)\Delta W(t)$$

Portfolio / Handelsstrategie:

$\phi(t)$	- Anzahl der Aktien S im Portfolio zum Zeitpunkt t
$\phi(t)\Delta S(t)$	- Gewinn (oder Verlust) des Portfolios über den Zeitschritt Δt

Portfolio Gain-Process:

$$\int_0^t \phi(\tau)\mathrm{d}S(\tau) \quad \text{bzw.} \quad \sum \phi(T_i)\Delta S(T_i)$$

Beachte: $\phi(t)$ darf zukunftige Ereignisse, insbesondere $\Delta S(T_i)$ nicht antizipieren.

Integrationstheorie für stochastische Prozesse

$$\lim_{\Delta T \to 0} \sum \phi(T_i)(S(T_i+\Delta T) - S(T_i)) \quad \neq \lim_{\Delta T \to 0} \sum \phi(T_i)(S(T_i) - S(T_i - \Delta T))$$

Risikoneutrale Bewertung

Risikoneutrale Bewertung (1/5)

Produkt A:
Zum Zeitpunkt $T_2 > 0$ wird die Regenmenge $R(T_2)$ (in mm) an einer definierten Stelle gemessen und der Euro-Betrag

$$A(T_2) := (R(T_2) - X) \cdot \frac{€}{mm}$$

ausgezahlt. $R(T_2)$ (somit $A(T_2)$) ist im allgemeinen stochastisch. – Was bestimmt den Wert $A(T_1)$ dieses Vertrages in T_1?

Produkt B:
Zum Zeitpunkt T_2 wird der Kurs $S(T_2)$ der IBM Aktie (in €) festgestellt und der Euro-Betrag

$$B(T_2) := (S(T_2) - X)$$

ausgezahlt. – Was bestimmt den Wert $B(T_1)$ dieses Vertrages in T_1?

Replikation:
Die Auszahlung von Produkt B ist replizierbar durch in T_1 erwerbbare Produkte: Sei $P(T_2; T_1)$ die Auszahlung eines Kredites, der in T_2 durch die Zahlung von 1 getilgt werden muß. In T_1:

Kaufe Aktie $S(T_1)$ und nehme Kredit $X \cdot P(T_2; T_1)$ auf, der in T_2 mit X getilgt werden muß.

Wert in T_2: $S(T_2) - X \ = \ A(T_2)$ Wert in T_1: $S(T_1) - X \cdot P(T_2; T_1) \ \stackrel{!}{=} \ A(T_1)$

Risikoneutrale Bewertung (2/5)

Replikation ist (unter Voraussetzungen) möglich für beliebige Auszahlungsfunktionen $V(T_2)$, z.B.

- Option mit Strike K: $V(T_2) = \max(S(T_2) - K, 0)$
- Digital-Option mit Strike K: $V(T_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } S(T_2) > K \\ 0 & \text{falls } S(T_2) < K \end{cases}$

- sofern man den stochastischen Prozess der unterliegenden Größen kennt.

Gesucht: Zusammensetzung ($\rightarrow$ *hedging*) bzw. Wert ($\rightarrow$ *pricing*) des *Replikationsportfolios*

$$V(T) \text{ für } T < T_2.$$

Risikoneutrale Bewertung (3/5)

Replication Strategy – Discrete Time (T_1, T_2), Two Assets (S, B), Two States (ω_1, ω_2)

In T_2 existieren nur zwei disjunkte Ereignisse / Zustände ω_1 und ω_2. Gegeben sei $V(T_2, \omega_i)$, sowie zwei gehandelte Produkte S und B. Gesucht ist ein Portfolio $\alpha S + \beta B$, welches in T_2 den Wert von $V(T_2)$ repliziert. Sein Wert in T_1 bestimmt dann den Wert $V(T_1)$.

$$\alpha \cdot S(T_2; \omega_1) + \beta \cdot B(T_2; \omega_1) \stackrel{!}{=} V(T_2; \omega_1)$$

$$\alpha \cdot S(T_1) + \beta \cdot B(T_1)$$

$$\alpha \cdot S(T_2; \omega_2) + \beta \cdot B(T_2; \omega_2) \stackrel{!}{=} V(T_2; \omega_2)$$

Das Geleichungssystem rechter hand ist lösbar, falls

$$S(T_2; \omega_1) \cdot B(T_2; \omega_2) - S(T_2; \omega_2) \cdot B(T_2; \omega_1) \neq 0$$

d.h. ($B \neq 0$)

$$\frac{S(T_2; \omega_1)}{B(T_2; \omega_1)} \neq \frac{S(T_2; \omega_2)}{B(T_2; \omega_2)}$$

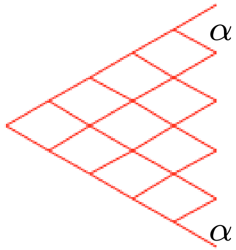
Risikoneutrale Bewertung (3/5)

Replication Strategy – Discrete Time (T_1, T_2), Two Assets (S, B), Two States (ω_1, ω_2)

In T_2 existieren nur zwei disjunkte Ereignisse / Zustände ω_1 und ω_2. Gegeben sei $V(T_2, \omega_i)$, sowie zwei gehandelte Produkte S und B. Gesucht ist ein Portfolio $\alpha S + \beta B$, welches in T_2 den Wert von $V(T_2)$ repliziert. Sein Wert in T_1 bestimmt dann den Wert $V(T_1)$.

$$\alpha \cdot S(T_2;\omega_1) + \beta \cdot B(T_2;\omega_1) \stackrel{!}{=} V(T_2;\omega_1)$$

$$\alpha \cdot S(T_1) + \beta \cdot B(T_1)$$



$$\alpha \cdot S(T_2;\omega_2) + \beta \cdot B(T_2;\omega_2) \stackrel{!}{=} V(T_2;\omega_2)$$

Das Geleichungssystem rechter hand ist lösbar, falls

$$S(T_2;\omega_1) \cdot B(T_2;\omega_2) - S(T_2;\omega_2) \cdot B(T_2;\omega_1) \neq 0$$

d.h. ($B \neq 0$) $$\frac{S(T_2;\omega_1)}{B(T_2;\omega_1)} \neq \frac{S(T_2;\omega_2)}{B(T_2;\omega_2)}$$

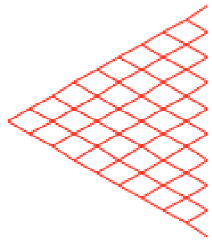
Risikoneutrale Bewertung (3/5)

Replication Strategy – Discrete Time (T_1, T_2), Two Assets (S, B), Two States (ω_1, ω_2)

In T_2 existieren nur zwei disjunkte Ereignisse / Zustände ω_1 und ω_2. Gegeben sei $V(T_2, \omega_i)$, sowie zwei gehandelte Produkte S und B. Gesucht ist ein Portfolio $\alpha S + \beta B$, welches in T_2 den Wert von $V(T_2)$ repliziert. Sein Wert in T_1 bestimmt dann den Wert $V(T_1)$.

$$\alpha \cdot S(T_2;\omega_1) + \beta \cdot B(T_2;\omega_1) \stackrel{!}{=} V(T_2;\omega_1)$$

$$\alpha \cdot S(T_1) + \beta \cdot B(T_1)$$



$$\alpha \cdot S(T_2;\omega_2) + \beta \cdot B(T_2;\omega_2) \stackrel{!}{=} V(T_2;\omega_2)$$

Das Geleichungssystem rechter hand ist lösbar, falls

$$S(T_2;\omega_1) \cdot B(T_2;\omega_2) - S(T_2;\omega_2) \cdot B(T_2;\omega_1) \neq 0$$

d.h. ($B \neq 0$) $$\frac{S(T_2;\omega_1)}{B(T_2;\omega_1)} \neq \frac{S(T_2;\omega_2)}{B(T_2;\omega_2)}$$

Risikoneutrale Bewertung (4/5)

Wir betrachten nochmals

$$
\begin{array}{ccc}
 & \overset{p}{\nearrow} & \alpha \cdot \frac{S(T_2;\omega_1)}{B(T_2;\omega_1)} + \beta \cdot 1 \overset{!}{=} \frac{V(T_2;\omega_1)}{B(T_2;\omega_1)} \\
\alpha \cdot \frac{S(T_1)}{B(T_1)} + \beta \cdot 1 & & \\
 & \underset{1-p}{\searrow} & \alpha \cdot \frac{S(T_2;\omega_2)}{B(T_2;\omega_2)} + \beta \cdot 1 \overset{!}{=} \frac{V(T_2;\omega_2)}{B(T_2;\omega_2)}
\end{array}
$$

Im Allgemeinen ist

$$\frac{V(T_1)}{B(T_1)} \neq \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{V(T_2)}{B(T_2)}\right) \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{S(T_1)}{B(T_1)} \neq \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{S(T_2)}{B(T_2)}\right).$$

Ist $\mathrm{sign}\left(\frac{S(T_2;\omega_2)}{B(T_2;\omega_2)} - \frac{S(T_1)}{B(T_1)}\right) \neq \mathrm{sign}\left(\frac{S(T_2;\omega_1)}{B(T_2;\omega_1)} - \frac{S(T_1)}{B(T_1)}\right)$ so existiert ein W'keitsmaß $\mathbb{Q}$ mit

$$\frac{S(T_1)}{B(T_1)} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S(T_2)}{B(T_2)}\right) \qquad \text{und somit} \qquad \frac{V(T_1)}{B(T_1)} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{V(T_2)}{B(T_2)}\right).$$

Das Maß $\mathbb{Q}$ wird als risikoneutrales Maß bzw. *equivalent martingale measure* bezeichnet. Es hängt nicht von V ab (!) - dies gilt nicht bei Betrachtung von

$$V(T_1) \overset{!}{=} \mathrm{E}\left(V(T_2)\right) \text{ statt } \frac{V(T_1)}{B(T_1)} \overset{!}{=} \mathrm{E}\left(\frac{V(T_2)}{B(T_2)}\right)).$$

Das Maß $\mathbb{Q}$ hängt von der gewählten Bezugsgröße, **Numéraire** genannt, ab (hier B).

Risikoneutrale Bewertung (4/5)

Wir betrachten nochmals

$$\alpha \cdot \frac{S(T_1)}{B(T_1)} + \beta \cdot 1 \quad \begin{cases} \xrightarrow{p} \; \alpha \cdot \frac{S(T_2;\omega_1)}{B(T_2;\omega_1)} + \beta \cdot 1 \overset{!}{=} \frac{V(T_2;\omega_1)}{B(T_2;\omega_1)} \\[2ex] \xrightarrow{1-p} \; \alpha \cdot \frac{S(T_2;\omega_2)}{B(T_2;\omega_2)} + \beta \cdot 1 \overset{!}{=} \frac{V(T_2;\omega_2)}{B(T_2;\omega_2)} \end{cases}$$

Replikationsportfolio ist unabhängig vom Wahrscheinlichkeitsmaß

Im Allgemeinen ist

$$\frac{V(T_1)}{B(T_1)} \neq \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{V(T_2)}{B(T_2)}\right) \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{S(T_1)}{B(T_1)} \neq \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{S(T_2)}{B(T_2)}\right).$$

Ist $\operatorname{sign}\left(\frac{S(T_2;\omega_2)}{B(T_2;\omega_2)} - \frac{S(T_1)}{B(T_1)}\right) \neq \operatorname{sign}\left(\frac{S(T_2;\omega_1)}{B(T_2;\omega_1)} - \frac{S(T_1)}{B(T_1)}\right)$ so existiert ein W'keitsmaß $\mathbb{Q}$ mit

$$\frac{S(T_1)}{B(T_1)} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S(T_2)}{B(T_2)}\right) \qquad \text{und somit} \qquad \frac{V(T_1)}{B(T_1)} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{V(T_2)}{B(T_2)}\right).$$

Das Maß $\mathbb{Q}$ wird als risikoneutrales Maß bzw. *equivalent martingale measure* bezeichnet. Es hängt nicht von V ab (!) - dies gilt nicht bei Betrachtung von

$$V(T_1) \overset{!}{=} \mathrm{E}\left(V(T_2)\right) \text{ statt } \frac{V(T_1)}{B(T_1)} \overset{!}{=} \mathrm{E}\left(\frac{V(T_2)}{B(T_2)}\right).$$

Das Maß $\mathbb{Q}$ hängt von der gewählten Bezugsgröße, **Numéraire** genannt, ab (hier B).

Risikoneutrale Bewertung (4/5)

Wir betrachten nochmals

$$\alpha \cdot \frac{S(T_2;\omega_1)}{B(T_2;\omega_1)} + \beta \cdot 1 \stackrel{!}{=} \frac{V(T_2;\omega_1)}{B(T_2;\omega_1)}$$

p

$$\alpha \cdot \frac{S(T_1)}{B(T_1)} + \beta \cdot 1$$

1-p

$$\alpha \cdot \frac{S(T_2;\omega_2)}{B(T_2;\omega_2)} + \beta \cdot 1 \stackrel{!}{=} \frac{V(T_2;\omega_2)}{B(T_2;\omega_2)}$$

Im Allgemeinen ist

$$\frac{V(T_1)}{B(T_1)} \neq \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{V(T_2)}{B(T_2)}\right) \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{S(T_1)}{B(T_1)} \neq \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{S(T_2)}{B(T_2)}\right).$$

Ist sign $\left(\frac{S(T_2;\omega_2)}{B(T_2;\omega_2)} - \frac{S(T_1)}{B(T_1)}\right) \neq$ sign $\left(\frac{S(T_2;\omega_1)}{B(T_2;\omega_1)} - \frac{S(T_1)}{B(T_1)}\right)$ so existiert ein W'keitsmaß $\mathbb{Q}$ mit

$$\frac{S(T_1)}{B(T_1)} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S(T_2)}{B(T_2)}\right) \qquad \text{und somit} \qquad \frac{V(T_1)}{B(T_1)} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{V(T_2)}{B(T_2)}\right).$$

Das Maß $\mathbb{Q}$ wird als risikoneutrales Maß bzw. *equivalent martingale measure* bezeichnet. Es hängt nicht von V ab (!) - dies gilt nicht bei Betrachtung von

$V(T_1) \stackrel{!}{=} \mathrm{E}\left(V(T_2)\right)$ statt $\frac{V(T_1)}{B(T_1)} \stackrel{!}{=} \mathrm{E}\left(\frac{V(T_2)}{B(T_2)}\right)$).

Das Maß $\mathbb{Q}$ hängt von der gewählten Bezugsgröße, **Numéraire** genannt, ab (hier B).

Risikoneutrale Bewertung (5/5): Tools for continuous time / Itô Processes

Definition (Martingal): Ein stochastischer Prozess M_t heißt $\mathbb{P}$-Martingal, falls

i) $M_s \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{P}}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \quad \forall s \leq t$ ii) $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}(|M_t|) < \infty \quad \forall t$

Martingal representation theorem: Sei M_t, mit $\mathrm{d}M_t = \sigma_t \mathrm{d}W_t$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal und $\sigma_t > 0$ ($\mathbb{Q}$-f.s.). Dann existiert für jedes $\mathbb{Q}$-Martingal N_t ein vorhersehbarer Prozess ϕ_t mit

i) $N_t = N_0 + \int_0^t \phi_s \mathrm{d}M_s$ ii) $\int_0^T \phi_t^2 \sigma_t^2 \mathrm{d}t < \infty$ ($\mathbb{Q}$-f.s.) .

Existence of Martingale Measure / Universal Pricing Theorem:

no arbitrage, complete market $\Rightarrow$ $\exists$ (eind.) Maß $\mathbb{Q}$: alle relativen Preise sind $\mathbb{Q}$-Martingale: $\frac{V(0)}{N(0)} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\frac{V(T_n)}{N(T_n)} \middle| \mathcal{F}_0\right)$

Change of measure theorem: Sei W_t eine $\mathbb{P}$-Brownsche Bewegung und γ_t ein $\{\mathcal{F}_t\}$-vorhersehbarer Prozess mit $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2)\right) < \infty$. Dann existiert ein Maß $\mathbb{Q}$, äquivalent zu $\mathbb{P}$, mit

i) $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \gamma_t \mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 \mathrm{d}t\right)$ ii) $\tilde{W}_t := W_t + \int_0^t \gamma_s \mathrm{d}s$ ist eine $\mathbb{Q}$-Brownsche Bewegung.

Martingal property for Ito processes: Sei X ein Ito-Prozess mit $\mathrm{d}X_t = \mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_t$ mit $\mathrm{E}((\int_0^T \sigma_t^2 \mathrm{d}s)^{1/2}) < \infty$. Dann gilt

$$X \text{ ist ein Martingal} \;\Leftrightarrow\; X \text{ ist driftfrei, d.h. } \mu_t \equiv 0.$$

Risikoneutrale Bewertung (5/5): Tools for continuous time / Itô Processes

Definition (Martingal): Ein stochastischer Prozess M_t heißt $\mathbb{P}$-Martingal, falls

i) $M_s \; = \; \mathrm{E}^{\mathbb{P}}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \quad \forall s \leq t$ ii) $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}(|M_t|) < \infty \quad \forall t$

Martingal representation theorem: Sei M_t, mit $\mathrm{d}M_t = \sigma_t \mathrm{d}W_t$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal und $\sigma_t > 0$ ($\mathbb{Q}$-f.s.). Dann existiert für jedes $\mathbb{Q}$-Martingal N_t ein vorhersehbarer Prozess ϕ_t mit

i) $N_t = N_0 + \int_0^t \phi_s \mathrm{d}M_s$ ii) $\int_0^T \phi_t^2 \sigma_t^2 \mathrm{d}t < \infty$ ($\mathbb{Q}$-f.s.) .

Existence of Martingale Measure / Universal Pricing Theorem:

no arbitrage, complete market $\Rightarrow$ $\exists$ (eind.) Maß $\mathbb{Q}$: alle relativen Preise sind $\mathbb{Q}$-Martingale: $\frac{V(0)}{N(0)} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\frac{V(T_n)}{N(T_n)} \Big| \mathcal{F}_0\right)$

Change of measure theorem: Sei W_t eine $\mathbb{P}$-Brownsche Bewegung und γ_t ein $\{\mathcal{F}_t\}$-vorhersehbarer Prozess mit $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2)\right) < \infty$. Dann existiert ein Maß $\mathbb{Q}$, äquivalent zu $\mathbb{P}$, mit

i) $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \gamma_t \mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 \mathrm{d}t\right)$ ii) $\tilde{W}_t := W_t + \int_0^t \gamma_s \mathrm{d}s$ ist eine $\mathbb{Q}$-Brownsche Bewegung.

Martingal property for Ito processes: Sei X ein Ito-Prozess mit $\mathrm{d}X_t = \mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_t$ mit $\mathrm{E}((\int_0^T \sigma_t^2 \mathrm{d}s)^{1/2}) < \infty$. Dann gilt

$$X \text{ ist ein Martingal} \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ ist driftfrei, d.h. } \mu_t \equiv 0.$$

Zinsstrukturen

Zinsstrukturen

Zero-Coupon Bond: Grundlegendes Objekt. Zinsen werden als abgeleitete Größen interpretiert.

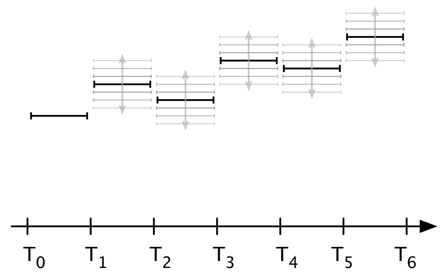
$$P(T_2) : [0, T_2] \times \Omega \mapsto \mathrm{IR}$$

$P(T_2; t) : \Omega \mapsto \mathrm{IR}$ (Zufallsvariable):
Wert einer garantierten Zahlung von 1 im Zeitpunkt T_2, gesehen im Zeitpunkt $t < T_2$.

Bemerkung: $P(T_2; T_2) = 1$

Forward-Rate:

$$\frac{P(T_1)}{P(T_2)} =: (1 + L(T_1, T_2) \cdot (T_2 - T_1)).$$



Zinskurve

$L(T_1, T_2; t) : \Omega \mapsto \mathrm{IR}$ (Zufallsvariable):
Zinsrate einer Investition von 1 im Zeitpunkt T_1 mit Auszahlung in Zeitpunkt T_2, gesehen im Zeitpunkt $t \leq T_1$.

Zinsstrukturmodell: Modellierung der Dynamik einer Kurve.

Black (1976) Model

for an option on the forward rate (aka Caplet)

Black (1976) Model for a Caplet (option of forward rate)

Option payoff:

$$\max\Big((L_n(T_n) - X)\cdot(T_{n+1}-T_n), 0\Big) \quad \text{in } T_{n+1},$$

where $L_n \cdot (T_{n+1} - T_n) := P(T_n)/P(T_{n+1}) - 1$, i.e. L_n denotes the forward rate for the period $[T_n, T_{n+1}]$.

Model specification:

$$\frac{\mathrm{d}L_n(t)}{L_n(t)} = \mu(t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W, \qquad \sigma = \text{const.}$$

Numeraire (good choice):

$$N(t) := P(T_{n+1}; t).$$

Drift:

$$L_n(t) = \frac{1}{(T_{n+1}-T_n)}\cdot(P(T_n)/P(T_{n+1})-1) = \frac{1}{(T_{n+1}-T_n)}\cdot\frac{P(T_n)-P(T_{n+1})}{P(T_{n+1})}$$

$$= \frac{\frac{1}{(T_{n+1}-T_n)}\cdot(P(T_n)-P(T_{n+1}))}{N}.$$

Black (1976) Model for a Caplet (option of forward rate)

Option payoff:

$$\max\big((L_n(T_n) - X) \cdot (T_{n+1} - T_n), 0\big) \quad \text{in } T_{n+1},$$

where $L_n \cdot (T_{n+1} - T_n) := P(T_n)/P(T_{n+1}) - 1$, i.e. L_n denotes the forward rate for the period $[T_n, T_{n+1}]$.

Model specification:

$$\frac{\mathrm{d}L_n(t)}{L_n(t)} = \mu(t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W, \qquad \sigma = \text{const.}$$

Numeraire (good choice):

$$N(t) := P(T_{n+1}; t).$$

Drift:

$$L_n(t) = \frac{1}{(T_{n+1} - T_n)} \cdot (P(T_n)/P(T_{n+1}) - 1) = \frac{1}{(T_{n+1} - T_n)} \cdot \frac{P(T_n) - P(T_{n+1})}{P(T_{n+1})}$$

$$= \boxed{\frac{\frac{1}{(T_{n+1}-T_n)} \cdot (P(T_n) - P(T_{n+1}))}{N}}.$$

Tradeable asset (portfolio of bonds)

Numeraire

Black (1976) Model for a Caplet (option of forward rate)

Option payoff:

$$\mathsf{max}\Big((L_n(T_n) - X) \cdot (T_{n+1} - T_n), 0\Big) \quad \text{in } T_{n+1},$$

where $L_n \cdot (T_{n+1} - T_n) := P(T_n)/P(T_{n+1}) - 1$, i.e. L_n denotes the forward rate for the period $[T_n, T_{n+1}]$.

Model specification:

$$\frac{\mathrm{d}L_n(t)}{L_n(t)} = \mu(t)\mathrm{d}t \; + \; \sigma \mathrm{d}W, \qquad \sigma = \text{const.}$$

Numeraire (good choice):

$$N(t) := P(T_{n+1}; t).$$

Drift:

$$L_n(t) = \frac{1}{(T_{n+1} - T_n)} \cdot (P(T_n)/P(T_{n+1}) - 1) = \frac{1}{(T_{n+1} - T_n)} \cdot \frac{P(T_n) - P(T_{n+1})}{P(T_{n+1})}$$

$$= \frac{\frac{1}{(T_{n+1} - T_n)} \cdot (P(T_n) - P(T_{n+1}))}{N}.$$

Black (1976) Model for a Caplet (option of forward rate)

Option payoff:

$$\max\Big((L_n(T_n) - X) \cdot (T_{n+1} - T_n), 0\Big) \quad \text{in } T_{n+1},$$

where $L_n \cdot (T_{n+1} - T_n) := P(T_n)/P(T_{n+1}) - 1$, i.e. L_n denotes the forward rate for the period $[T_n, T_{n+1}]$.

Model specification:

$$\frac{\mathrm{d}L_n(t)}{L_n(t)} = \mu(t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W, \qquad \sigma = \text{const.}$$

Numeraire (good choice):

$$N(t) := P(T_{n+1}; t).$$

Drift:

$$L_n(t) = \frac{1}{(T_{n+1} - T_n)} \cdot (P(T_n)/P(T_{n+1}) - 1) = \frac{1}{(T_{n+1} - T_n)} \cdot \frac{P(T_n) - P(T_{n+1})}{P(T_{n+1})}$$

$$= \boxed{\frac{\frac{1}{(T_{n+1}-T_n)} \cdot (P(T_n) - P(T_{n+1}))}{N}}.$$

N-relative price

Black (1976) Model for a Caplet (option of forward rate)

Option payoff:

$$\max\Big((L_n(T_n) - X)\cdot(T_{n+1}-T_n), 0\Big) \quad \text{in } T_{n+1},$$

where $L_n \cdot (T_{n+1}-T_n) := P(T_n)/P(T_{n+1}) - 1$, i.e. L_n denotes the forward rate for the period $[T_n, T_{n+1}]$.

Model specification:

$$\frac{\mathrm{d}L_n(t)}{L_n(t)} = \mu(t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W, \qquad \sigma = \text{const.}$$

Numeraire (good choice):

$$N(t) := P(T_{n+1};t).$$

Drift:

$$L_n(t) = \frac{1}{(T_{n+1}-T_n)}\cdot(P(T_n)/P(T_{n+1}) - 1) = \frac{1}{(T_{n+1}-T_n)}\cdot\frac{P(T_n)-P(T_{n+1})}{P(T_{n+1})}$$

$$= \boxed{\frac{\frac{1}{(T_{n+1}-T_n)}\cdot(P(T_n)-P(T_{n+1}))}{N}}.$$

N-relative price

Under the equivalent martingale measure Q^N, the N-relative prices are martingales (drift = 0)

Black (1976) Model for a Caplet (option of forward rate)

Model specification:

$$\frac{\mathrm{d}L_n(t)}{L_n(t)} = \sigma \mathrm{d}W, \qquad \text{under } \mathbb{Q}^N\text{, where } \sigma = \text{const.}, \ N(t) := P(T_{n+1};t) \quad \text{(Numeraire)}$$

Option value:

$$\begin{aligned} V(T_{n+1}) &= \max\Big((L_n(T_n) - X)\cdot(T_{n+1}-T_n), 0\Big) && \text{in } T_{n+1}. \\ V(T_n) &= \max\Big((L_n(T_n) - X)\cdot(T_{n+1}-T_n), 0\Big)\cdot P(T_{n+1};T_n) && \text{in } T_n. \end{aligned}$$

Universal Pricing Theorem:

$$\begin{aligned} \frac{V(0)}{N(0)} &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\frac{V(T_n)}{N(T_n)}\right) \\ &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\frac{\max((L_n(T_n)-X)\cdot(T_{n+1}-T_n),0)\cdot P(T_{n+1};T_n)}{P(T_{n+1};T_n)}\right) \end{aligned}$$

Option value:

$$V(0) = P(T_{n+1};0)\ \cdot\ \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\max\left((L_n(T_n)-X),0\right)\right)\cdot(T_{n+1}-T_n)$$

Black (1976) Model for a Caplet (option of forward rate)

Model specification:

$$\frac{\mathrm{d}L_n(t)}{L_n(t)} = \sigma \mathrm{d}W, \qquad \text{under } \mathbb{Q}^N\text{, where } \sigma = \text{const., } N(t) := P(T_{n+1};t) \quad \text{(Numeraire)}$$

Option value:

$$\begin{aligned} V(T_{n+1}) &= \max\Big((L_n(T_n) - X) \cdot (T_{n+1} - T_n), 0\Big) && \text{in } T_{n+1}. \\ V(T_n) &= \max\Big((L_n(T_n) - X) \cdot (T_{n+1} - T_n), 0\Big) \cdot P(T_{n+1};T_n) && \text{in } T_n. \end{aligned}$$

Universal Pricing Theorem:

$$\begin{aligned} \frac{V(0)}{N(0)} &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\frac{V(T_n)}{N(T_n)}\right) \\ &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\frac{\max((L_n(T_n) - X) \cdot (T_{n+1} - T_n), 0) \cdot \cancel{P(T_{n+1};T_n)}}{\cancel{P(T_{n+1};T_n)}}\right) \end{aligned}$$

Option value:

$$V(0) = P(T_{n+1};0) \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\max\left((L_n(T_n) - X), 0\right)\right) \cdot (T_{n+1} - T_n)$$

Black (1976) Model for a Caplet (option of forward rate)

Model specification:

$$\frac{\mathrm{d}L_n(t)}{L_n(t)} = \sigma \mathrm{d}W, \qquad \text{under } \mathbb{Q}^N\text{, where } \sigma = \text{const.}, \; N(t) := P(T_{n+1};t) \quad \text{(Numeraire)}$$

Option value:

$$V(T_{n+1}) = \max\Big((L_n(T_n) - X)\cdot(T_{n+1}-T_n), 0\Big) \qquad \text{in } T_{n+1}.$$

$$V(T_n) = \max\Big((L_n(T_n) - X)\cdot(T_{n+1}-T_n), 0\Big)\cdot P(T_{n+1};T_n) \qquad \text{in } T_n.$$

Universal Pricing Theorem:

$$\frac{V(0)}{N(0)} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\frac{V(T_n)}{N(T_n)}\right)$$

$$= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\frac{\max((L_n(T_n) - X)\cdot(T_{n+1}-T_n), 0)\cdot \cancel{P(T_{n+1};T_n)}}{\cancel{P(T_{n+1};T_n)}}\right)$$

Option value:

log normal distributed

$$V(0) = P(T_{n+1};0) \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\max((\boxed{L_n(T_n)} - X), 0)\right) \cdot (T_{n+1}-T_n)$$

Black (1976) Model for a Caplet (option of forward rate)

Model specification:

$$\frac{\mathrm{d}L_n(t)}{L_n(t)} = \sigma \mathrm{d}W, \qquad \text{under } \mathbb{Q}^N\text{, where } \sigma = \text{const.}, \ N(t) := P(T_{n+1};t) \quad \text{(Numeraire)}$$

Option value:

$$V(T_{n+1}) = \max\Big((L_n(T_n) - X)\cdot(T_{n+1}-T_n), 0\Big) \qquad \text{in } T_{n+1}.$$

$$V(T_n) = \max\Big((L_n(T_n) - X)\cdot(T_{n+1}-T_n), 0\Big)\cdot P(T_{n+1};T_n) \qquad \text{in } T_n.$$

Universal Pricing Theorem:

$$\frac{V(0)}{N(0)} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\frac{V(T_n)}{N(T_n)}\right)$$

$$= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\frac{\max((L_n(T_n) - X)\cdot(T_{n+1}-T_n), 0)\cdot \cancel{P(T_{n+1};T_n)}}{\cancel{P(T_{n+1};T_n)}}\right)$$

Option value:

log normal distributed

$$V(0) = P(T_{n+1};0)\cdot \underbrace{\mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\max\left(\left(\boxed{L_n(T_n)} - X\right), 0\right)\right)}_{L_n(0)\cdot\Phi\left(\frac{\ln(\frac{L_n(0)}{X}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T_n}{\sigma\sqrt{T_n}}\right) - X\cdot\Phi\left(\frac{\ln(\frac{L_n(0)}{X}) - \frac{1}{2}\sigma^2 T_n}{\sigma\sqrt{T_n}}\right)}\cdot(T_{n+1}-T_n)$$

Under log-normal dynamics of the forward rate

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{L(t)} = \mu(t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W, \qquad \sigma = \text{const.}$$

the price of a Caplet paying

$$V(T_{n+1}) = \max\Big((L_n(T_n) - X)\cdot(T_{n+1} - T_n), 0\Big) \qquad \text{in } T_{n+1}$$

is given by a Black Scholes type formula

$$V(0) = P(T_{n+1};0)\cdot\left[L_n(0)\cdot\Phi\left(\frac{\ln(\frac{L_n(0)}{X}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T_n}{\sigma\sqrt{T_n}}\right) - X\cdot\Phi\left(\frac{\ln(\frac{L_n(0)}{X}) - \frac{1}{2}\sigma^2 T_n}{\sigma\sqrt{T_n}}\right)\right]\cdot(T_{n+1} - T_n)$$

LIBOR Market Model

aka BGM

Brace, Gatarek, Musiela; Miltersen, Sandmann, Sondermann; etc.

LIBOR Market Model

Modellspezifikation:

$$\frac{\mathrm{d}L_i}{L_i} = \mu_i(t)\mathrm{d}t \; + \; \sigma_i(t)\mathrm{d}W_i \qquad \text{für } i = 0, \ldots, N-1,$$

Eigenschaften:

- Zeitabhängige Volatilität $\sigma_i(t)$
- Konsistente Modellierung von N Zinsraten L_i ($\rightarrow$ Zinskurve) bezüglich einem Numeraire / Maß.
- Multi Faktor Modell: N korrelierte Brownsche Bewegungen $< \mathrm{d}W_i, \mathrm{d}W_j >= \rho_{i,j}$.
- LIBOR L_n Log-Normal Verteilt im $\mathbb{Q}^{P(T_{n+1})}$-Maß ($\rightarrow$ ”kompatibel” zu Black Modell)
- Verallgemeinerung des Black-Modells

LIBOR Market Model: Bestimmung des Drift Terms (1/3)

Choice of Numeraire: $N(t) = P(T_N; t)$ (T_N Bond).

Consider the N-relative Prices of *tradable assets*:

$$\frac{P(T_i)}{P(T_N)} = \prod_{k=i}^{N-1} \underbrace{\frac{P(T_k)}{P(T_{k+1})}}_{=1+\delta_k L_k} = \prod_{k=i}^{N-1} (1 + \delta_k L_k) \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$

In an arbitrage free model N-relative prices are drift free in:

$$\mathrm{Drift}\left[\frac{P(T_i)}{P(T_N)}\right] = \mathrm{Drift}\left[\prod_{k=i}^{N-1} (1 + \delta_k L_k)\right] = 0 \qquad i = 1, \ldots, N-1 \text{ in } Q^{P(T_N)},$$

Product rule for Ito processes:

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\left(\prod_{k=i}^{N-1} (1 + \delta_k L_k)\right) \\ &= \prod_{k=i}^{N-1} (1 + \delta_k L_k) \cdot \sum_{j=i}^{N-1} \left(\frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1 + \delta_j L_j)} + \sum_{\substack{l \geq j+1 \\ l \leq N-1}} \frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1 + \delta_j L_j)} \cdot \frac{\delta_l \mathrm{d}L_l}{(1 + \delta_l L_l)} \right). \end{aligned}$$

LIBOR Market Model: Bestimmung des Drift Terms (2/3)

From

$$\underset{Q^{P(T_N)}}{\text{Drift}}\left[\prod_{k=i}^{N-1}(1+\delta_k L_k)\right] = 0 \qquad i = 1,\ldots,N-1$$

we find

$$\sum_{j=i}^{N-1}\underset{Q^{P(T_N)}}{\text{Drift}}\left[\frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1+\delta_j L_j)} + \sum_{\substack{l \geq j+1\\ l \leq N-1}} \frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1+\delta_j L_j)} \cdot \frac{\delta_l \mathrm{d}L_l}{(1+\delta_l L_l)}\right] = 0 \qquad i = 1,\ldots,N-1$$

and thus

$$\underset{Q^{P(T_N)}}{\text{Drift}}\left[\frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1+\delta_j L_j)} + \sum_{\substack{l \geq j+1\\ l \leq N-1}} \frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1+\delta_j L_j)} \cdot \frac{\delta_l \mathrm{d}L_l}{(1+\delta_l L_l)}\right] = 0 \qquad j = 1,\ldots,N-1.$$

LIBOR Market Model: Bestimmung des Drift Terms (3/3)

With

$$\mathrm{d}L_j = L_j \mu_j \mathrm{d}t + L_j \sigma_j \mathrm{d}W_j \qquad , \qquad \mathrm{d}L_j \cdot \mathrm{d}L_l = L_j L_l \sigma_j(t) \sigma_l(t) \rho_{j,l} \mathrm{d}t$$

the drift equation

$$\underset{Q^{P(T_N)}}{\mathrm{Drift}} \left[\frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1+\delta_j L_j)} + \sum_{\substack{l \geq j+1 \\ l \leq N-1}} \frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1+\delta_j L_j)} \cdot \frac{\delta_l \mathrm{d}L_l}{(1+\delta_l L_l)} \right] = 0 \qquad j = 1, \ldots, N-1$$

becomes

$$\mu_j \frac{\delta_j L_j}{(1+\delta_j L_j)} + \sum_{\substack{l \geq j+1 \\ l \leq N-1}} \frac{\delta_j L_j}{(1+\delta_j L_j)} \cdot \frac{\delta_l L_l}{(1+\delta_l L_l)} \cdot \sigma_j(t) \sigma_l(t) \rho_{j,l} = 0.$$

Thus

$$\mu_j = - \sum_{\substack{l \geq j+1 \\ l \leq N-1}} \frac{\delta_l L_l}{(1+\delta_l L_l)} \cdot \sigma_j(t) \sigma_l(t) \rho_{j,l}$$

Model Framework:

Dynamik in $\mathbb{Q}^{P(T_N)}$:

$$\mathrm{d}L_j = \sum_{j+1 \leq l \leq N-1} \frac{-\delta_l L_j L_l}{(1+\delta_l L_l)} \cdot \sigma_j(t)\sigma_l(t)\rho_{j,l}\,\mathrm{d}t \;+\; L_j \sigma_j(t)\,\mathrm{d}W_j \quad ; \quad L_j(0) = L_{j,0}$$

$$< \mathrm{d}W_i, \mathrm{d}W_j >= \rho_{i,j}$$

Freie Parameter:

$\sigma_1(t), \ldots, \sigma_{N-1}(t)$ – $N-1$ zeitabhängige Volatilitätsfunktionen.

$\rho_{i,j}$ – $\frac{(N-1) \times (N-2)}{2}$ Korrelationen.

Kalibrierungsproblem:

Bestimme ”fit” der Parameter durch aktuelle Marktpreise und/oder historische Daten.

In der Praxis übliche Modellkalibrierung(en) (und Reduktion der Feiheitsgrade):

- Empirie: Zeithomogene funktionale Form: $\sigma_i(t) = g(T_i - t);\ g(\tau) = (a\tau + b)\exp(c\tau + d)$.

- Fit an Caplet Marktpreise: $\int_0^{T_i} \sigma_i^2(t)\mathrm{d}t \ - \ (\sigma_i^{\text{Black, implied}})^2 T_i \ \rightarrow \ \text{min}$.

- Empirie: Exponentiell abfallende Korrelation: $\rho_{i,j} = \exp(-\alpha|i-j|)$.

- Fit an korrelationsempfindliche Produkte (e.g. Swaptions).

- Faktorreduktion: *Principal Component Analysis* der Korrelationsmatrix.

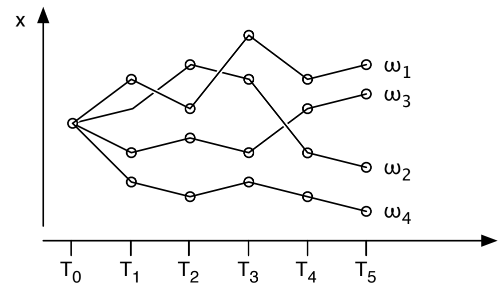
Some extensions of the model:

- Multi-Currency-Model (linked through an FX prozess).
- Smile Modelling: Introducing non-log-normal terminal LIBOR distributions (under corresponding measure):
  - State dependend (local) volatility.
  - Stochastic volatility.
  - Jump processes.

Diskretiserung und Implementierung

stochatischer Prozesse

- Monte Carlo Methoden



- Lattice Methoden
  - Allgm. Lattice (Markov Functional Model)
  - Binomialbaum, Trinomialbaum
  - PDE